代数幾何学シンポジウム記録
1979年度　pp.117-141



# クレモナ群について

名大・理　梅村　浩

$k$を体，$x_1, x_2, \cdots, x_n$を$k$上の変数とする．体$k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の$k$自己同型群$\mathrm{Aut}_k k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を$n$変数クレモナ群という．ここでは$k=\mathbb{C}$と簡単のため，仮定する．$n$変数クレモナ群を$Cr_n$で表わす．$n=1$ならば，$Cr_1$は$\mathbb{P}_1$の自己同型群$PGL_2$と同型であり，代数群である．しかし$n \geqq 2$になると，$Cr_n$は大きなものになる．例えば，$n=2$として，$G_l = \{(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2+f(x_1)) \mid f(x_1) \in k[x_1],\ \deg f(x_1) \leqq l-1\}$とおけば，任意の正整数$l$について，$G_l \subset Cr_2$であり，$G_l \simeq G_a^{\,l}$となる．故に$Cr_2$は任意の正整数次元の代数群を含んでいる．我々は次の古典的な問題を扱う：$Cr_n$はどのくらい，連結代数群を含むか？もっと具体的に述べると，$Cr_n$に含まれる連結代数群で極大なものを分類せよ．$n=2$の場合の解答はEnriquesによって与えられた（Enriquesの結果については本文を参照されたい）．$n=3$

の場合は Enriques と Fano の研究があり，完全にできたと主張している（Enriques e Fano [5]，Fano [6]）．しかし彼らの証明には，ギャップがあるし，結論も正しいかどうかよく解からない．少くとも我々が現在，彼らの論文を読むことは不可能に近い．我々の目的は，$n=3$ の場合の分類を厳密に行うことである．その際，ただ正確であるというだけでなく，証明や論法は自然であり，理解し易いことが非常に望ましい．我々の研究は進行中であり，この報告が中間的なものである．

Enriques と Fano は次の様な方法で分類する：$G$ を $Cr_3$ に含まれる代数群とする．$G$ は作用 $(G, X)$ で与えられる（2．定理2）．$X$ を equivariant に完備化して，$X$ は完備とできるであろう．さらに equivariant chow の lemma，equivariant resolution によって，$X$ は non-sing. projective と仮定できるであろう．一方 $X$ は rational であるので，$h^{0,1}=0$．したがって，$X$ の Picard 多様体は discrete である．故に，

代数群Gはlinear systemを不変にする．彼らは，3次元であること(目に見える?)を利用して，幾何的にlinear systemを分類することによって，3変数クレモナ群に含まれる代数群を分類する．我々の方法は，全く異なっている．彼らの方法を幾何学的と呼べば，我々の方法は群論的と呼べる。群論的方法の良い点は，厳密であること，および，しばしば高次元の結果をも，もたらすことである(2.定理7，定理8参照)．

## 1．定義および基本的な事実．

我々の問題はLieによって考察された，Lie群の多様体への作用の局所的な分類に密接に関係しているので，解析幾何の定義をいくつか復習しておく．

定義1　解析group germとは次の条件を満たすsystem $(G, e, A, m)$のことである：

(i) $G$ は複素多様体;

(ii) $e \in G$;

(iii) $\theta$ は $e$ の近傍から $G$ への解析写像;

(iv) $m$ は $G \times G$ の開集合 $\Omega$ から $G$ への解析写像;

(v) 任意の $g \in G$ について, $(e, g) \in \Omega$, $(g, e) \in \Omega$, $m(e, g) = m(g, e) = g$ が成立する;

(vi) 任意の $\theta(g)$ が定義されるような $g \in G$ について,
$$(g, \theta(g)) \in \Omega,\ (\theta(g), g) \in \Omega,\ m(g, \theta(g)) = m(\theta(g), g) = e$$
が成り立つ;

(vii) $g, h, k \in G$ であり, $(g, h) \in \Omega$, $(h, k) \in \Omega$, $(m(g, h), k) \in \Omega$, $(g, m(h, k)) \in \Omega$ ならば, $m(m(g, h), k) = m(g, m(h, k))$ が成り立つ.

$m(g, h)$ を $gh$ と, $\theta(g)$ を $g^{-1}$ と書くことにする。以下, 簡単のため $(G, e, \theta, m)$ を $G$ と書く.

以下の定義はほぼ明白であるが, 正確に述べると長くなるので省略する。Bourbaki [1] 参照.

定義 2. 解析 group germ の homomorphism

定義3 解析group germ $G$ の多様体 $X$ への作用のことを law chunk of analytic operation と呼び $(G, X)$ で表わす.

定義4. $(G_1, X_1)$, $(G_2, X_2)$ を law chunk of analytic operation とする. $(G_1, X_1)$ から $(G_2, X_2)$ への law chunk of analytic operation の homomorphism とは, group germ の homomorphism $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, $X_1$ の open set から $X_2$ の解析写像 $f$ の組であり, 作用と可換なものをいう.

Lieの第3定理. $G$ を解析 group germ とする。そのとき, Lie群 $G'$ で $G$ と解析group germ として同型なものが存在する.

しかしながら, law chunk of analytic operation は一般に global にできると限らない.

定義5. law chunk of analytic operation $(G, X)$ が次の条件を満たすとき, 非原始的という:

law chunk of analytic operation $(G', X')$ と homomorphism $(G, X) \xrightarrow{(\varphi,\psi)} (G', X')$ で，$\dim X > \dim X'$ かつ $\psi$ の Jacobian の rank はある点で 0 でないものが存在する。非原始的でないときに原始的であるという。

Frobenius の定理から次の結果が導びかれる

定理6. $(G, X)$ を analytic operation とする。$\dim X \geq 2$ かつ $(G, X)$ が generically transitive でないならば，$(G, X)$ は非原始的である。

定理7. $G$ を Lie 群，$H$ を閉部分群，$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をそれぞれの Lie 環とする。そのとき $(G, G/H)$ が原始的である必要十分条件は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Lie 部分代数として極大であることである。

Lie は $\dim X \leq 2$ の law chunk of analytic operation $(G, X)$ を分類した。$\dim X = 3$ については，原始的なものの全てを，非原始的なものの一部分を分類した。$\dim X = 4$ の原始的なものは Morozoff が分類した。

定理 8 (Lie[7]). $(G, X)$ を law chunk of analytic operation とする。$(G, X)$ が効果的であり(定義は下に述べる　　　　　　　　), $\dim X = 3$, かつ原始的ならば $(G, X)$ は law chunk of analytic operation として次のものに同型である;

(1) $(PGL_4,\ \mathbb{P}_3)$

(2) $(GTA_3,\ \mathbb{A}_3)$

(3) $(SGTA_3,\ \mathbb{A}_3)$

(4) $(PSp_4,\ \mathbb{P}_3)$

(5) $(PSO_4,\ \mathbb{P}_3)$

(6) $(GTE_3,\ \mathbb{A}_3)$

(7) $(GS_3,\ \mathbb{A}_3)$

(8) $(PSO_5,\ \{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 0\} \subset \mathbb{P}_4)$.

記号の意味は次の通りである: $GTA_3$ はアフィン変換群. $SGTA_3$ は体積を不変にするアフィン変換全体のなす群. $PSp_4$, $PSO_4$ はそれぞれ, $Sp_4$, $SO_4$ の自然な 4 次の表現の射影化. $GTE_3$ はユークリッド変換群, $GS_3$ は相似変換群. $SO_5$ の 5 次の表現は $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 0$ を不変にする。その 2 次超曲面への作用が (8) である.

$\dim X = 4$ の場合の同様な分類が Morozoff [9] にあるが，スペースをとるので，ここには記さない．

定義 9．$(G, X)$ を law chunk of analytic operation，$\mathfrak{g}$ を $G$ の Lie 環とする．$G$ が局所的に $X$ に作用するので，Lie 環の homomorphism $\mathfrak{g} \to H^0(X, T_X)$ が得られる．この homomorphism が単射であるとき $(G, X)$ は効果的であるという．

以上，解析的なカテゴリーで行った定義は代数的にも行える．そうして定義される概念は，形容詞「解析的」を「代数的」に替えることによって呼ばれる．例えば，代数 group germ，代数 group germ の homomorphism，law chunk of algebraic operation 等である．ただし，定義 5 には解析的という形容詞がついていないので次の様にする．

定義 10．law chunk of algebraic operation $(G, X)$

が次の条件を満すとき，de Jonquières 型という：law chunk of analytic operation $(G', X')$ と homomorphism $(G, X) \xrightarrow{(\varphi, \psi)} (G', X')$ で，$\dim X > \dim X'$ かつ $\psi$ の像の閉包の次元は正となるものが存在する。

次の定理は Lie の第3定理に相当する．

定理 11. $G$ を代数 group germ とする．そのとき，代数群 $G'$ で $G$ と代数 group germ として同型なものが存在する．

解析的な場合との大きな違いは次の定理である．

定理 12. $(G, X)$ を law chunk of algebraic operation とする。そのとき，algebraic operation $(G', X')$ で，$(G, X)$ と law chunk of algebraic operation として同型なものが存在する．

定理 11, 12 は Weil による。証明は Rosenlicht [10] 参照．

次の定理はFrobeniusの定理に対応している。

定理13. $(G, X)$ を algebraic operation とする。そのとき $X$ の $G$ 不変な開集合 $U$ で商 $U/G$ が存在するようなものが存在する。

系14. $(G, X)$ を algebraic operation とする。$(G, X)$ が generically intransitive かつ $\dim X \geqq 2$ ならば、$(G, X)$ は de Jonquières 型である。

系15. $(G, X)$ を algebraic operation とする。$G$ が可解かつ $\dim X \geqq 2$ ならば、$(G, X)$ は de Jonquières 型である。

証明. $G$ に関する条件から、$G$ の1次元正規代数部分群 $H$ が存在する。$(H, X)$ に定理13を使うと、law chunk of algebraic operation の homomorphism $(H, X) \xrightarrow{(Id, f)} (H, U/H)$ をえる。$H$ は正規だから、$G$ は $H$ の orbit を入れ換える。つまり $G$ は $U/H$ に作用して $(Id, f): (G, X) \longrightarrow (G, U/H)$ は law chunk of algebraic operation の homomorphism である。

定理7には次の定理が対応する.

定理16. $G$を代数群, $H$を$G$の閉部分部群とする. $(G, G/H)$が de Jonquières型である必要十分条件は, $G$の閉部分群$K$で$H \subsetneq K \subsetneq G$かつ$\dim H < \dim K$となるものが存在することである。

代数多様体のカテゴリーから, 解析多様体のカテゴリーへの自然は functor を an で表わす: $G$が代数 group germ なら$G^{an}$は解析 germ であり, law chunk についても, それらの間の homomorphism についても同様である. $(G, X)$を law chunk of algebraic operation で de Jonquières型とすれば, $(G^{an}, X^{an}) = (G, X)^{an}$は非原始的である. この逆が殆んど正しいことが後に解かる。

## 2. $Cr_3$に含まれる代数群の分類

特に，ことわらない限り，代数群は連結であるとする。クレモナ群に代数群が含まれているということを厳密に定義しなければならない。$n$変数クレモナ群 $Cr_n$は$\mathbb{P}_n$の双有理変換群と同型である。一方$\mathbb{P}_n$の双有理変換群 $\mathrm{Birat\text{-}Aut}\,\mathbb{P}_n$ は $k(=\mathbb{C})$ 上の代数多様体のカテゴリーから群のカテゴリーへのfunctorになる。したがって，$Cr_n$は群functorとなる。もっと詳しく述べると，代数多様体$T$に対して，$Cr_n(T) = \mathrm{Birat\,Aut}_T(T\times\mathbb{P}_n)$とおく。代数群も当然，群functorである。

定義1. $G$を代数群とする。$G$から$Cr_n$の準同型とは，群functorの準同型を意味する。$G$が$Cr_n$に含まれるとは，準同型があたえられ，それによって$G$が$Cr_n$の部分functorになることを意味するとする。

Demazure [3] により，準同型$G\longrightarrow Cr_n$をあたえる

ことと, law chunk of algebraic operation $(G, \mathbb{P}_n)$ を与えることは同値である。一方, 1の定理12によって, law chunk of algebraic operation $(G', X')$ と law chunk of analytic operation の同型 $(\varphi, f)$: $(G, X) \to (G', X')$ が存在する。$G$ と $G'$ が $\varphi$ によって双正則同型であることが導びかれ, $G = G'$, $\varphi = \mathrm{Id}$ と仮定できる。逆に, $X'$ を $n$ 次元の有理多様体とし, algebraic operation $(G, X')$ を与えられれば, 双有理写像 $f: X' \to \mathbb{P}_n$ を選ぶと law chunk of algebraic operation $(G, \mathbb{P}_n)$ が従って, 準同型 $G \to Cr_n$ が決まる。$f$ のとり方は $Cr_n$ だけあるので次のことが証明された。

定理2. $Cr_n$ に含まれる代数群 $G$ の共役類を与えることと, 効果的な algebraic operation $(G, X)$ で, $X$ が $n$ 次元, 有理多様体を与えることは同値である。

注意. 厳密には, $\{Cr_n$ に含まれる代数群 $G\}/$共役 $\simeq \{(G, X) \mid (G, X)$ は効果的な algebraic operation,

$X$は$n$次元有理多様体 (class chunk of algebraic operation の同値). であり. $Cr_n$に含まれる代数群$G$を与えたとき, $G$の共役類を与える効果的な algebraic operation $(G, X)$ が一意的に定まるわけではない.

以下, $Cr_n$に含まれる代数群の共役類の代りに, $n$次元有理多様体への効果的な algebraic operation を考える. $Cr_n$に含まれる代数群は次の定理によって限定される.

定理 (Matsumura [8]). $G$を代数群, $X$を代数多様体とする. $G$が$X$に効果的に作用すると仮定する. そのとき, $G$からアーベル多様体$A$への surjective homomorphism があれば, 次の不等式が成立する: $\dim A \leq X$の irregularity.

この定理を我々の場合に使う. 有理多様体の irregularity は$0$であるので, $\dim A \leq 0$ となる. 従って, 構造定理から次の定理を得る.

定理3．クレモナ群$Cr_n$に含まれる代数群は線型である．

定義4．$G$を$Cr_n$に含まれる代数群とする．$G$は有理多様体$X$へのalgebraic operation $(G, X)$に対応しているとする．$G$が原始的(resp 非原始的)であるとは，$(G, X)^{an}$が原始的(resp. 非原始的であることを意味するものとする．$G$が de Jonquières型であるとは，$(G, X)$が de Jonquières型であることを言う．

この定義は$(G, X)$のとり方によらない．

定理5 (Enriques). $Cr_2$に含まれる代数群は，共役を除いて，次の代数群に含まれる：
(1) $(PGL_3, \mathbb{P}_2)$，(2) $(PGL_2 \times PGL_2, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1)$，(3) $(\mathrm{Aut}^0 F_m, F_m)$，ここで $F_m = P(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(m))$，$m \geq 2$

定理5の(1)は原始的であり，(2)と(3)は de Jonquières型である．我々は，$Cr_3$で同様のことをしたいのであるが，先づ原始的な群について

て考察する．

定理6．$Cr_3$に含まれる原始的な代数群は，共役をのぞいて，次のものに限られる：(1) $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$, (2) $(GTA_3, A_3)$, (3) $(SGTA_3, \mathbb{A}_3)$, (4) $(PSp_4, \mathbb{P}_3)$, (5) $(PSO_4, \mathbb{P}_3)$
(6) $(GTE_3, \mathbb{A}_3)$, (7) $(GS_3, \mathbb{A}_3)$, (8) $(PSO_5, \{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\}\subset \mathbb{P}_4)$, (9) $(SO_4, SO_4/K)$, ここで，
$$K=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&A&\\0&&&\end{pmatrix}\in SO_4\right\}.$$

証明は，analytic local な分類，I の定理8から出発し，analytic global な分類，次に algebraic global な分類をする（Umemura [12] 参照）．

定理6の系．$Cr_3$に含まれる原始的な代数群は，共役をのぞいて，次のものに含まれ，かつ次のものは$Cr_3$の代数群として極大である：(1) $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$, (2) $(PSO_5,$
$\{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\}\subset \mathbb{P}_4)$.

実際，(2),(3),(4),(5),(6),(7)は(1)に含まれ，(9)は(8)に含まれる．原始的な群は非原始的な群に含まれないので，原始的な代数群のあいだで

極大なら，代数群として極大である．

我々の論法の長所は，4次元に対しても使えることであり，Morozoff [9] の分類から出発して，定理5と同様な結果を証明することができる．系に相当する部分のみを述べると，

定理7．$Cr_4$ に含まれる原始的な代数群は，共役をのぞいて，次のものに含まれ，かつ次のものは，$Cr_4$ の代数群として，極大である：
(1) $(PGL_5, \mathbb{P}_4)$，(2) $(PSO_6, \{x_0^2+x_1^2+\cdots+x_5^2=0\} \subset \mathbb{P}_5)$.

さらに，一般に次のことが成り立つ．
定理8．$G$ を $Cr_n$ に含まれる原始的な代数群とする．$G$ は次のものに限る：
(a) $G$ が reductive でないとき，$G$ は $n$ 変数 affine の部分変換
(b) $G$ が reductive のとき，$G$ は必然的に半単純であり，
(b-1) $G$ 単純
(b-2) $G$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると，単純 Lie 環 $\mathfrak{g}'$ で

$g = g' \times g'$ となる．

注意．定理8から，次のことがわかる．
$(G_1, G_1/H_1)$，$(G_2, G_2/H_2)$ 原始的な algebraic operation とする．次は同値

(1) $(G_1, G_1/H_1)$ と $(G_2, G_2/H_2)$ が algebraic operation として同型

(2) $(G_1, G_1/H_1)$ と $(G_2, G_2/H_2)$ が law chunk of algebraic operation として同型．

(3) $(G_1, G_1/H_1)^{an}$ と $(G_2, G_2/H_2)^{an}$ が analytic operation として同型．

証明のアイディア．(1) $\Rightarrow$ (2)，(1) $\Rightarrow$ (3) は自明．(2) $\Rightarrow$ (1) は known (Rosenlicht [10])．(3) $\Rightarrow$ (1) が定理8から導びかれる．

次に，非原始的な群を考察する．次の定理は，非原始的な群の多くは de Jonquières 型であることを示している．

定理9. $G$を$Cr_3$に含まれる,非原始的な代数群とする. $\dim G \geqq 4$ ならば, $G$はde Jonquières型である.

この定理は, Enriques-Fano [5] に述べられている. Umemura [13] に, 現代的で明解な証明がある. この定理を用いれば, $Cr_3$に含まれる非原始的な群の次元は3以下であることがわかる. 一方, これと1の系14, 系15, および2次元以下の代数群は可解であること, 3次元の可解でない代数群は$SL_2$, $SO_3$に限ることから, $Cr_3$に含まれる非原始的な代数群$G$は等式空間$(G, G/H)$で与えられる; ここで, $G = SL_2$又は$SO_3$, $H$は$G$の有限部分群である. $SL_2$又は$SO_3$の有限部分群はよく知られている(例えば, Weber [14]): $SO_3$について言えば, 巡回群, 2面体群, 4面体群, 8面体群, 20面体群である. $SL_2$は$SO_3$の2次のcoveringであるので, $SL_2$の有限部分群も, 本質的に$SO_3$の有限部分群と同じである. $(G, G/H)$のうち, effectiveでないもの

を除くと，次のものが残る：(1) $(SL_2, SL_2/\Gamma_n)$，$\Gamma_n$ は位数が奇数 $n$ の巡回群，(1)′ $(SO_3, SO_3/\Gamma_n)$，$\Gamma_n$ は位数が整数 $n$ の巡回群，(2) $(SL_2, SL_2/D_{2n})$，$D_{2n}$ は2面体群であり，$n$ は奇数，(3) $(SO_3, SL_2/D_{2n})$，$D_{2n}$ は2面体群であり，$n$ は正整数，(4) $(SO_3, SO_3/\Gamma)$，$\Gamma$ は4面体，8面体，又は20面体群。

一方 I の定理16を使って de Jonquières なものを除くことができて，

定理10. $Cr_3$ に含まれる代数群で，非原始的であり de Jonquières 型でないものは次に限る：
$(SO_3, SO_3/\Gamma)$，$\Gamma$ は4面体，8面体，又は20面体群．

定理10の群は，自分より大きな連結な非原始的な $Cr_3$ の代数群に含まれることはない．その様な群は，定理9によって，de Jonquières 型になってしまうからである．したがって，定理10の群を含み得るのは，$Cr_3$ の原始的な群であり，それらは定理6の系によって，

$(PGL_4, \mathbb{P}_3)$, $(PSO_5, \{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\}\subset\mathbb{P}_4)$ と仮定してよい。例えば，もし $(SO_3, SO_3/\Gamma)$ が $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$ に含まれるとすると，$(SO_3, SO_3/\Gamma)$ から $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$ への law chunk of algebraic operation の homomorphism がある。$(SO_3, SO_3/\Gamma)$ は homogeneous space であるので，Rosenlicht [10] によって，law chunk の homomorphism は algebraic operation の homomorphism となる。故に，homomorphism $\rho: SL_2 \longrightarrow SL_4$ を得る。この表現の表現空間を $V$ とすると，$v \in V$ で $v$ は $\rho(\tilde{\Gamma})$ によって半不変となるものが存在しなければならなり，ここで $\tilde{\Gamma}$ は自然な写像 $SL_2 \longrightarrow SO_3$ による $\Gamma$ の逆像。一方 $V$ は，$SL_2$ の既約表現の直和であり，既約表現は2変数の多項式で与えられるので，$(SO_3, SO_3/\Gamma)$ が $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$ に含まれるかどうかは多面体群の不変式の問題に帰着する。多面体群の不変式は19世紀によく知られている (Clebsch [2]) ので次の結果を得る。

定理 11. $Cr_3$に含まれる代数群(の共役類)$(SO_3, SO_3/\Gamma)$は，$\Gamma$が4面体群のとき，$(PSO_5, \{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\} \subset \mathbb{P}_4)$に含まれる．$\Gamma$が8面体，又は20面体群ならば，$(SO_3, SO_3/\Gamma)$は$Cr_3$に含まれる代数群(の共役類)として極大である．

以上により，我々の問題，3変数クレモナ群に含まれる代数群の分類，を解決するためには，de Jonquières 型の群を分類しなければならない．Fano [6] は，de Jonquières 型の群を12の族に分類するが，これが正しいか今のところ，よくわからない．

## 文　献


[1] Bourbaki, N.　Groupes et algèbre de Lie, Chapitre 3, groupes de Lie, Hermann, Paris 1972.

[2] Clebsch, A.　Theorie der binären algebraischen Formen, Teubner, Leibzig 1872.

[3] Demazure, M. Sous-groupes algébrique de rang maximum du groupe de Cremona, Ann. Scient Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 3, 1970, P. 507-588.

[4] Enriques, F. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano, Rendic. Accand. dei Lincei, 1893, P 468 - 473.

[5] Enriques, F e Fano, G. Sui gruppi di trasformazioni cremoniane dello spazio, Annali di Matematica pura ed applicata, s. 2ª, to. 15. 1897, p59 - 98.

[6] Fano, G I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio, Atti R. Acc. di Torino, Vol. 33, 1898, P221 - 271.

[7] Lie, S. Theorie der Transformationsgruppen, dritter und letzter Abschnitt, Teubner, Leibzig 1893.

[8] Matsumura, H. On algebraic groups of birational transformations, Lincei-R. Sc. fis. mat e nat., Vol 34, 1963.

[9] Morozoff, V. Sur les groupes primitifs, МАТЕМАТИСКИЙ СБОРНИК, T. 5(47), N.2, 1939.

[10] Rosenlicht, M. Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. of Math., 78, 1956, P401–433.

[11] Sumihiro, H. Equivariant completion, J. Math. Kyoto Univ. 14-1 (1974) 1–28.

[12] Umemura, H. Sur les sous-groupes algébriques primitifs du groupe de Cremona à trois variables, Nagoya Math. J., 79 (1980).

[13] ———— Maximal algebraic subgroups of the Cremona group of three variables – imprimitive algebraic subgroups of exceptional

type. preprint.

[14] Weber, H. Lehrbuch der Algebra, Zweiter Band, Braunschweig 1899.